Intégrer pour mieux dériver*

Dominique Hoareau, domeh@wanadoo.fr

On suppose connue l´intégration des fonctions réglées d´un segment de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on rappelle que, pour une fonction réelle f réglée sur $[a; b]$, l´application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a; b]$. En tout point c de continuité de f, F est dérivable et $F'(c) = f(c)$. Ainsi, si f est continue sur $[a; b]$, f admet F comme primitive sur $[a; b]$. Toujours avec $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$, si G désigne une primitive quelconque de f sur $[a; b]$, on a $(F - G)' = 0$ et, par le théorème des accroissements finis ponctués, F et G diffèrent d´une constante (nécessairement égale à $G(a)$), ce qui donne la formule fondamentale du calcul intégral :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

En jonglant avec quelques équations fonctionnelles classiques, on illustre la méthode du renforcement des hypothèses qui, combinant les relations algébriques et une propriété supposée de continuité, assure de la dérivabilité et ramène alors les équations fonctionnelles initiales à des équations différentielles.

1 Des équations fonctionnelles classiques

1.1 Autour des applications affines

Propriété 1 *(Équation de Cauchy)*

Une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (L)$$

si, et seulement si,

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha x.$$

Intégrer...

Si f est une solution continue de (L), on peut intégrer l´identité (L) par rapport à y :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_0^t f(x + y)dy = tf(x) + \int_0^t f(y)dy,$$

puis par le changement de variable $u = x + y$ dans l´intégrale du membre de gauche :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_x^{x+t} f(u)du = tf(x) + \int_0^t f(y)dy.$$

*Document disponible sur le site Mégamaths

En faisant $t = 1$ et en prenant, à bon droit puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, une primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{x+1} f(u)du - \int_0^1 f(y)dy = (F(x+1) - F(1)) - (F(x) - F(0)).$$

Par continuité de f, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc le membre de droite est, par composition et additions, aussi C^1, ce qui assure enfin que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour mieux dériver.

On peut désormais dériver l´identité (L) par rapport à y : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) = f'(y)$, donc, en faisant $y = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)$, ce qui assure que f' est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe alors deux constantes réelles α et β telles que $f(x) = \alpha x + \beta$. Puisque $f(0) = f(0 + 0) = 2 f(0)$, $f(0) = 0$ et $\beta = 0$. Réciproquement, toute fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie clairement (L).

Propriété 2 *(Équation de Jensen)*

Une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \qquad (A)$$

si, et seulement si,

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha x + \beta.$$

Si f est dans l´ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (A), on remarque que, pour tout réel β, $x \mapsto f(x) + \beta$ est autant dans $\mathcal{S}$. On peut donc supposer, quitte à remplacer f par $f - f(0)$, que $f(0) = 0$. L´identité (A) donne alors avec $y = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2},$$

puis

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)}{2}.$$

On est ainsi ramené à l´équation de Cauchy. On conclut que $f \in \mathcal{S}$ est nécessairement affine, et la réciproque est immédiate.

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y - x) f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \int_x^y f(t)dt.$$

1.2 Autour de la fonction carrée

Propriété 3

Une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y)) \qquad (K)$$

si, et seulement si,

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha x^2.$$

Intégrer...

Si f est une solution continue de (K), on peut intégrer l´identité (K) par rapport à x :

$$\forall (t,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \int_0^t f(x+y)dx+\int_0^t f(x-y)dx=2\int_0^t f(x)dx+2tf(y),$$

puis par les changements de variables $u=x+y$ et $v=x-y$ dans les deux intégrales du membre de gauche :

$$\forall (t,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \int_y^{y+t} f(u)du+\int_{-y}^{t-y} f(v)dv=2\int_0^t f(x)dx+2tf(y).$$

En faisant $t=1$ et en prenant, à bon droit puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, une primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{2}\left(F(y+1)-F(y)+F(1-y)-F(-y)-2\int_0^1 f(x)dx\right).$$

Par continuité de f, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc le membre de droite est, par composition et additions, aussi C^1, ce qui assure que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. Le membre de droite est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc f aussi et, par "zig-zag", f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour mieux dériver.

On peut désormais dériver deux fois l´identité (K) par rapport à x :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f'(x+y)+f'(x-y)=2f'(x)\quad\text{puis}\quad f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(x).$$

De même par rapport à y :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f'(x+y)-f'(x-y)=2f'(x)\quad\text{puis}\quad f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(y).$$

On en déduit que la dérivée seconde de f est constante sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que f est une fonction trinôme $x\mapsto \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. Avec $x=y=0$ dans (K), $f(0)=0$ donc $\gamma=0$. Avec $x=0$ dans (K), $\forall y\in\mathbb{R},\quad f(y)+f(-y)=2f(y)$, ce qui assure que f est paire. Ainsi, $f(1)=f(-1)$ donc $\alpha+\beta=\alpha-\beta$, $\beta=0$. Réciproquement, toute fonction $f: x\mapsto \alpha x^2$ vérifie clairement l´équation (K).

1.3 Autour du logarithme népérien et de l´exponentielle réelle

Propriété 4

Une fonction numérique f continue sur $I=\,]0;+\infty[$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x,y)\in I^2,\quad f(xy)=f(x)+f(y)\quad (\mathcal{L})$$

si, et seulement si,

$$\exists \alpha\in\mathbb{R},\quad \forall x\in I,\quad f(x)=\alpha\ln x.$$

Intégrer...

Soit f une solution continue de $(\mathcal{L})$. En intégrant par rapport à y :

$$\forall (x,t) \in I^2, \quad \int_1^t f(xy)dy = f(x)(t-1) + \int_1^t f(y)dy,$$

puis par le changement de variable $u = xy$ dans la première intégrale :

$$\forall (x,t) \in I^2, \quad \frac{1}{x}\int_x^{xt} f(u)du = f(x)(t-1) + \int_1^t f(y)dy.$$

En particulier avec $t = 2$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)du - \int_1^2 f(y)dy.$$

Puisque la fonction inverse et $x \mapsto \int_x^{2x} f(u)du$ (intégrale fonction de ses bornes à intégrande continue) sont de classe C^1 sur I, la fonction f est aussi C^1 sur I.

Pour mieux dériver.

On dérive $(\mathcal{L})$ par rapport à y : $\forall (x,y) \in I^2, \quad xf'(xy) = f'(y)$, puis en faisant $y = 1$:

$$\forall x \in I, \quad xf'(x) = f'(1).$$

Si $f'(1) = 0$, f' est nulle sur I, donc f est constante sur I de valeur $f(1)$. Or, avec $x = y = 1$ dans $(\mathcal{L})$, $f(1) = 0$, donc f est la fonction nulle sur I. Si $f'(1) \neq 0$, $\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$, et par intégration entre 1 et x, $f(x) = f(1) + f'(1)(\ln x - \ln 1) = f'(1)\ln x$. Réciproquement, toute fonction $f : x \mapsto \alpha \ln x$ est continue sur I et vérifie $(\mathcal{L})$.

Propriété 5

Une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y) \quad (E)$$

si, et seulement si,

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(\alpha x).$$

Premières considérations

Si f vérifie (E) et si f s´annule sur $\mathbb{R}$ (par exemple en un certain x_0), alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0)f(x - x_0) = 0$ donc f est la fonction nulle. Désormais, le cas $f = 0$ est écarté et, donc, f est sans zéro sur $\mathbb{R}$. On note, pour la suite, que $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ valable en tout réel x assure que f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

Intégrer...

Si f est une solution continue de (E), en intégrant (E) par rapport à y :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_0^t f(x+y)dy = f(x)\int_0^t f(y)dy,$$

puis par le changement de variable $u = x + y$:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_x^{x+t} f(u)du = f(x) \int_0^t f(y)dy,$$

et, enfin, avec $t = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+1} f(u)du = f(x) \int_0^1 f(y)dy.$$

Puisque f est continue et à valeurs strictement positives, la constante $C = \int_0^1 f(y)dy$ est strictement positive. On écrit alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{C} \int_x^{x+1} f(u)du = \frac{1}{C} (F(x+1) - F(x))$ où F désigne une primitive C^1 de la fonction continue f. Ainsi, f est da classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour mieux dériver.

En dérivant (E) par rapport à y :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x+y) = f(x)f'(y), \quad \text{puis en faisant } y = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)f(x).$$

Il vient $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0)\exp(f'(0)x)$. Avec $x = y = 0$ dans (E), $f(0) = (f(0))^2$ et, puisque $f(0)$ est exclu, $f(0) = 1$. Ainsi, f est $x \mapsto \exp(f'(0)x), x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction $f : x \mapsto \exp(\alpha x)$ et la fonction nulle sont continues sur $\mathbb{R}$ et vérifient l´équation (E).

Propriété 6

Une fonction numérique f continue sur $I = \,]0;+\infty[$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad (P)$$

si, et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 0 \quad \textit{ou} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) = x^\alpha.$$

1.4 Autour des fonctions trigonométriques et hyperboliques

Propriété 7

Une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y) \quad (S_0)$$

ou de façon équivalente (en posant $u = x + y$ et $v = x - y$)

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u)f(v) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - f\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \quad (S_1)$$

si, et seulement si,

1. *la fonction f est linéaire,*
2. *ou*
$$\exists (\alpha,\omega) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha \sin(\omega x),$$
3. *ou*
$$\exists (\alpha,\omega) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha \sinh(\omega x).$$

La fonction nulle est une solution particulière de (E). Désormais, on suppose que f est une solution continue non nulle de (E).

Intégrer (S_1)**...**

Si f est une solution continue de (S_0) (ou (S_1)), en intégrant (S_1) par rapport à u :

$$\forall (t,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(v)\int_0^t f(u)du = \int_0^t f\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 du - \int_0^t f\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 du.$$

Les changements de variables $w = \frac{u+v}{2}$ et $w = \frac{u-v}{2}$ dans le membre de droite conduisent à

$$\forall (t,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(v)\int_0^t f(u)du = 2\int_{\frac{v}{2}}^{\frac{t+v}{2}} f(w)^2 dw - 2\int_{-\frac{v}{2}}^{\frac{t-v}{2}} f(w)^2 dw.$$

On affirme qu´il est possible de choisir $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $C = \int_0^{t_0} f(u)du$ soit non nul. En cas contraire, la fonction (intégrale de sa borne supérieure à intégrande continue) $t \mapsto \int_0^t f(u)du$, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f, serait constante de valeur 0, donc sa dérivée f serait aussi nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui est exclu. On peut ainsi écrire, en désignant par F une primitive C^1 sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue f^2,

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad f(v) = \frac{2}{C}\left(F\left(\frac{t_0+v}{2}\right) - F\left(\frac{v}{2}\right) - F\left(\frac{t_0-v}{2}\right) + F\left(\frac{-v}{2}\right)\right).$$

Par composition et additions, f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et, par "zig-zag", f est en fait C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour mieux dériver (S_0).

On dérive (S_0) par rapport à x :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2f(x)f'(x) = f'(x+y)f(x-y) + f(x+y)f'(x-y),$$

puis par rapport à y :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 = f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y),$$

ou encore

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(u)f(v) = f(u)f''(v).$$

On choisit v_0 tel que $f(v_0) \neq 0$ et f est solution de

$$f''(u) - \frac{f''(v_0)}{f(v_0)}f(u) = 0 \quad ; \quad f(0) = 0.$$

Trois cas se présentent. Si $f''(v_0) = 0$, alors $f'' = 0$, f est affine de la forme $u \mapsto \alpha u + \beta$. La condition initiale $f(0) = 0$ assure que f est en fait linéaire. Sinon, si le quotient $\frac{f''(v_0)}{f(v_0)}$ est t strictement positif, f est du type $u \mapsto a\cosh(\omega u) + \alpha\sinh(\omega u)$ où on a posé $\omega = \sqrt{\frac{f''(v_0)}{f(v_0)}}$. La condition initiale $f(0) = 0$ donne alors $f : u \mapsto \alpha\sinh(\omega u)$. Dans le cas $\frac{f''(v_0)}{f(v_0)} < 0$, f est une combinaison linéaire de $c_\omega : u \mapsto \cos(\omega u)$ et $s_\omega : u \mapsto \sin(\omega u)$ où $\omega = \sqrt{-\frac{f''(v_0)}{f(v_0)}}$. Avec la condition initiale, f est en fait proportionnelle à s_ω. Réciproquement, les fonctions linéaires, les $u \mapsto \alpha\sinh(\omega u)$ et les $u \mapsto \alpha\sin(\omega u)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifient clairement (S_0).

Exercice 2
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt.$$

Propriété 8 *(Équation de d´Alembert)*

Une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie l´équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (C)$$

si, et seulement si,

1. *la fonction f est constante de valeur 0 ou 1,*
2. *ou*
$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(\omega x),$$
3. *ou*
$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cosh(\omega x).$$

2 Détermination des sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, de dimension finie et stable par translation sur la variable

On considère un sous-espace vectoriel E de dimension finie n de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall (f,a) \in E \times \mathbb{R}, \quad f_a \in E \text{ où } f_a \text{ désigne l´application } x \mapsto f(a+x) \text{ de } \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Plusieurs exemples viennent naturellement à l´esprit : $\mathbb{R}_k[X]$ (pour $k \in \mathbb{N}$), Vect (exp), Vect (cos, sin) et Vect (cosh, sinh). On affirme que $f \in E$ est nécessairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et f' est dans E.

Intégrer...

On choisit une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E, et, à bon droit puisque chaque e_k est continue sur $\mathbb{R}$, une primitive E_k de e_k sur $\mathbb{R}$. Si f est dans E, pour chaque y de $\mathbb{R}$, il existe des réels $\lambda_1(y)$, ..., $\lambda_n(y)$ tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(y) e_k(x) \quad (\diamondsuit).$$

De là, il existe une fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x+y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(y) E_k(x) + G(y).$$

En particulier, pour chaque réel y, et chaque choix de $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a le système linéaire carré, de taille $n+1$, aux inconnues $(\lambda_1(y), \cdots, \lambda_n(y), G(y))$:

$$(S)\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(y) E_k(x_1) + G(y) = F(x_1 + y) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(y) E_k(x_{n+1}) + G(y) = F(x_{n+1} + y) \end{cases}.$$

Pour mieux dériver.

On peut choisir $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que le déterminant de (S)

$$\begin{vmatrix} E_1(x_1) & \cdots & E_n(x_1) & 1 \\ E_1(x_2) & \cdots & E_n(x_2) & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ E_1(x_n) & \cdots & E_n(x_n) & 1 \\ E_1(x_{n+1}) & \cdots & E_n(x_{n+1}) & 1 \end{vmatrix}$$

soit non nul. En cas contraire, pour chaque choix de $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, et pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} E_1(x_1) & \cdots & E_n(x_1) & 1 \\ E_1(x_2) & \cdots & E_n(x_2) & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ E_1(x_n) & \cdots & E_n(x_n) & 1 \\ E_1(x) & \cdots & E_n(x) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On développe par rapport à la dernière ligne et on obtient une identité en x :

$$A_1 E_1(x) + \cdots + A_n E_n(x) + B = 0,$$

puis par dérivation :

$$A_1 e_1(x) + \cdots + A_n e_n(x) = 0.$$

Puisque la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, $A_1 = \cdots = A_n = 0$. L´égalité $A_1 = 0$ donne la même situation de déterminant nul, avec une taille de moins. En réitérant ce qui précède, on aboutit à $1 = 0$. Contradiction et résultat.

Ainsi, par un choix convenable de $x_1, \ldots, x_{n+1}$, le système (S) est de Cramer. Les formules de Cramer montrent que chaque λ_k est une combinaison linéaire à coefficients constants des seconds membres $F(x_k + \bullet)$. Ainsi, chaque λ_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et chaque fonction dérivée λ_k', combinaison linéaire des $f(x_k + \bullet)$, est dans l´espace vectoriel E. La relation $(\diamondsuit)$ en faisant $x = 0$ donne

$$f = \sum_{k=1}^{n} e_k(0) \lambda_k,$$

donc, à nouveau puisque E est un espace vectoriel, f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f' \in E$.

L´application $D : f \mapsto f'$ est bien définie de E dans E et est dans $\mathcal{L}(E)$. Si P désigne son polynôme minimal, l´égalité $P(D) = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$ affirme que E est contenu dans l´espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de l´équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants $P(D)(\bullet) = 0$, lequel est de dimension $d^\circ(P) \leqslant n$. Ainsi, pour des raisons de dimensions, E est exactement l´espace des solutions de $P(D)(\bullet) = 0$. La réciproque est sans problème.

Références

a) http ://perso.orange.fr/megamaths/ad/x-equafoncv2002.pdf, Rolland, sur Megamaths.

b) http ://boumbo.toonywood.org/xavier/maths/stmalo/eqfonc-cours.pdf sur le site de X. Caruso.

c) Les carnets mathématiques numeros 1 (Mai 2006) et 2 (Mars 2007), SCÉRÉN, CRDP ALSACE.

d) Questions-Réponses, J-M Exbrayat, RMS 9-10 1995, Vuibert.

e) Équations fonctionnelles, R. Cuculière, Quadrature 35 janvier-février-mars 1999.

f) Équations fonctionnelles, L.G Vidiani, Quadrature 53 juillet-septembre 2004,
ou sa version web http ://www.prepas.org/ups/maths/documents/efQ.pdf